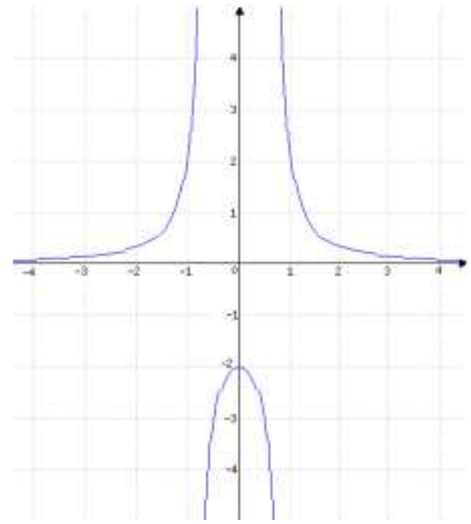
Examen extraordinario, desarrollado paso a paso. Esperamos sea de utilidad.

1. El dominio de la función *f(x)* = $\frac{10}{\sqrt{3-6x}}$, es

a) $(\frac{1}{2},\infty)$ b) $(-\infty,\frac{1}{2})$ c) $(\frac{1}{2},\infty)$ d) $(-\infty,\frac{1}{2})$

2. El rango de la función que se muestra en la gráfica es

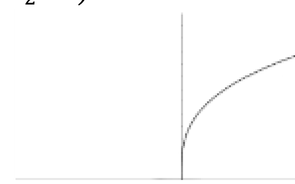
a) $(-\infty,-2)\cup[0,\infty)$ b) $(-\infty,-2]\cup(0,\infty)$ c) $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,\infty)$ d) $((-\infty,\infty)$

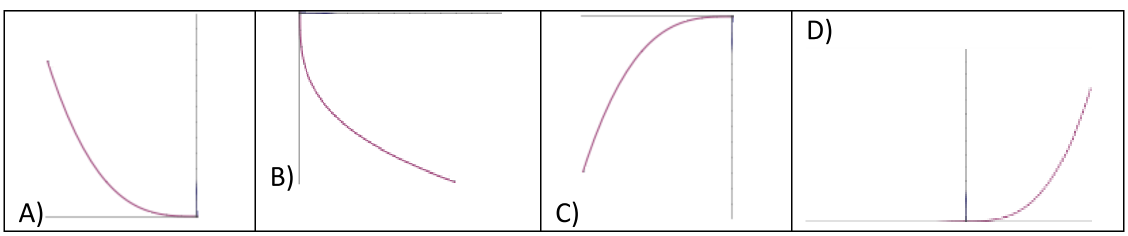


3. si $\mathrm{f(x)}=\frac{6}{3-2x}$ y g(x) = 3x-1, el dominio de *(f + g) (x) es*

a) $\left(-\infty,\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{6},\infty\right)$ b) $\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right)\cup\left(-\frac{1}{6},\infty\right)$ c) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ d) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$

4. La gráfica que representa la función inversa de la función biyectiva que se muestra a la derecha es





5. El $\lim\limits_{x\to 12}\frac{3-\sqrt{x-3}}{x-12}$ es

a) 6 b) $\frac{1}{6}$ c) $-\frac{1}{6}$ d) -6

6. El $\lim\limits_{x\to 12}\frac{\sqrt{16x^2-24x+9}}{2x+7}$ es

a) 45 b) 31 c) $\frac{31}{45}$ d) $\frac{45}{31}$

7. El $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{1-2x}$ es

a) –3 b) -1 c) 1 d) 3

8. El $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{sen(2x)}$ es

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d)2

9. El $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ es

a) e^2 b) $2e$ c) $\frac{2}{e}$ d) $\frac{1}{e^2}$

10. La función $f(x)=\begin{cases}2x+a, si\ x<1\\ x-1, si\ x\geq 1\end{cases}$ es continua el valor de *a* es

a) 2 b) 0 c) -1 d) -2

11. La derivada con respecto a x de $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x+3}}$ es

a) $-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ c) $-\frac{1}{x+3}$ d) $\frac{1}{x+3}$

12. La derivada con respecto a x de $f(x) = e^{sen^2(x)}$ es

a) $sen(2x)e^{sen^2(x)}$ b) $2sen(x)e^{sen^2(x)}$ c) $2cos(x)e^{sen^2(x)}$ d) $cos(2x)e^{sen^2(x)}$

13. La derivada de ***y*** con respecto a ***x*** de $x^2 + xy + y^2 = 2$ es

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y-2}{x+2y}$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x+2y}$ c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y}{x}$

14. La segunda derivada con respecto a x de $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ es

a) $\frac{24}{x^5}$ b) $-\frac{24}{x^5}$ c) $\frac{24}{x^3}$ d) $-\frac{24}{x^3}$

15. La derivada con respecto a x de la función $y = \cos\left(\frac{1-x}{x}\right)$ es

a) $\frac{1}{x^2}sen\left(\frac{1-x}{x}\right)$ b) $sen\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$ c) $-\frac{1}{x^2}sen\left(\frac{1-x}{x}\right)$ d) $-sen\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$

16. La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $y = \frac{2}{3+2x}$ en el punto $P(-1,2)$ es

a) 8x + y + 2 = 0 b) x + 4y – 7 = 0 c) x – 4y + 9 = 0 d) x – 4y – 6 = 0

17. La función de posición de un proyectil que es lanzado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo es $s(t) = -16t^2 + 48t$, donde ***s*** se mide en metros y ***t*** en segundos. Entonces la altura máxima que alcanzará el proyectil es

a) 1.5m b) 3.0m c) 27.5m d) 36.0m

18. La función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ tiene un mínimo relativo en

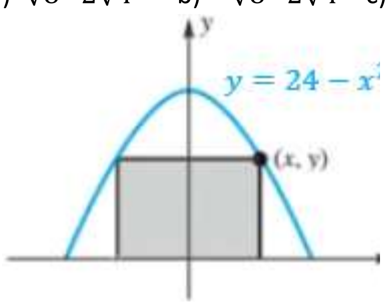
a) $x = -\frac{5}{3}$ b) x=-1 c) x=1 d) $x = \frac{5}{3}$

19. La función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ tiene un punto de inflexión en

a) $x = -1$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 2$

20. Un rectángulo se inscribe en la parábola de ecuación $y = 24 - x^2$ como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con el área máxima?

a) $\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{4}$ b) $-\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{4}$ c) $-16 \cdot 4\sqrt{2}$ d) $16 \cdot 4\sqrt{2}$



21. La función que al derivar resulta $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ y que pasa por el punto (2,0) es

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x - 4$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 4$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 4x$ d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$

22. Al calcular $\int \frac{tan^2(x)}{cos^2(x)}dx$ se obtiene

a) $-\frac{tan^3(x)}{3} + C$ b) $\frac{cot^3(x)}{3} + C$ c) $-\frac{cot^3(x)}{3} + C$ d) $\frac{tan^3(x)}{3} + C$

23. Al calcular $\int 2xe^x dx$ se obtiene

a) $e^x(1-x) + C$ b) $2e^x(1-x) + C$ c) $2e^x(x-1) + C$ d) $e^x(x-1) + C$

24. El área bajo la curva $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el intervalo [0,3] es

a) $3u^2$ b) $4u^2$ c) $\frac{14}{3}u^2$ d) $5u^2$

1. El dominio de la función *f(x)* = $\frac{10}{\sqrt{3-6x}}$, es

a) $(\frac{1}{2}, \infty)$ b) $(-\infty, \frac{1}{2})$ c) $(\frac{1}{2}, \infty)$ d) $(-\infty, \frac{1}{2})$

$\sqrt{3-6x}$ El denominador tiene que ser diferente de 0 y el radicando 3-6x no puede ser negativo.

$3-6x\ > 0$ $3-6x\ \geq 0$ Es correcto para la raíz, pero no lo es como denominador.

$3-6x-3\ > 0\ -3$

$-6x\ > -3$

$\frac{-6x}{6} > \frac{-3}{6}$

$-x\ > \frac{-3}{6}$

$-x\ > \frac{-3}{2\cdot 3}$

$-x\ > \frac{-1}{2}$

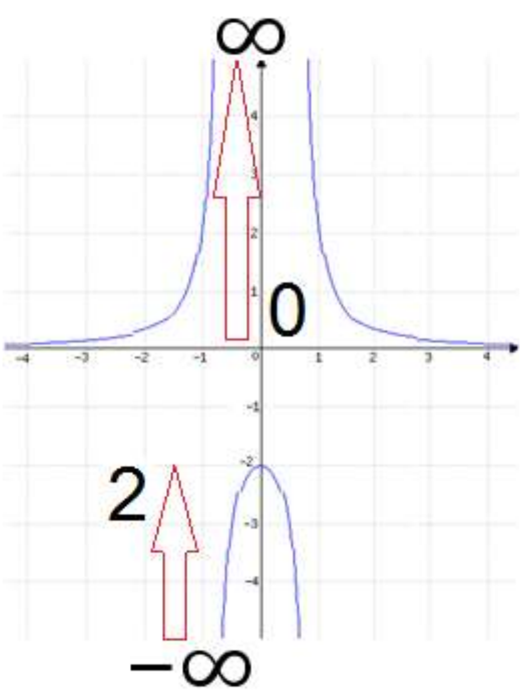
$(-1)(-x)\ < (-1)\left(\frac{-1}{2}\right)$

$x\ < \frac{1}{2}$ El dominio de la función es de -∞ a $\frac{1}{2}$ sin tocar $\frac{1}{2}$, es decir abierto (-∞,$\frac{1}{2}$).

$-\infty$ ∞

2. El rango de la función que se muestra en la gráfica es

a) $(-\infty,-2)\cup[0,\infty)$ b) $(-\infty,-2]\cup(0,\infty)$ c) $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,\infty)$ d) $((-\infty,\infty)$



El recorrido es de −∞ a -2, toca o incluye a -2 (cerrado); y de 0 sin tocarlo a ∞ (intervalo abierto en 0).

3. si $f(x) = \frac{6}{3-2x}$ y g(x) = 3x-1, el dominio de *(f + g) (x) es*

a) $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$ b) $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}, \infty\right)$ c) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ d) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

$$\mathrm{f(x)+g(x)} = \frac{6}{3-2x} + 3x - 1 = \frac{6}{3-2x} + \frac{3x-1}{1}\frac{3-2x}{3-2x} = \frac{6}{3-2x} + \frac{(3x-1)(3-2x)}{3-2x} =$$

$$\mathrm{f(x)+g(x)} = \frac{6+(3x-1)(3-2x)}{3-2x} = \frac{6+3x\cdot 3-3x\cdot 2x-1\cdot 3-1\cdot 2x}{3-2x} = \frac{6+3\cdot 3x-3\cdot 2\cdot x\cdot x-3-2x}{3-2x} =$$

$$\mathrm{f(x)+g(x)} = \frac{6+9x-6x^2-3-2x}{3-2x} = \frac{-6x^2+9x-2x+6-3}{3-2x} = \frac{-6x^2+7x+3}{3-2x} = \frac{-(6x^2-7x-3)}{-(2x-3)}$$

$$\mathrm{f(x)+g(x)} = \frac{(6x^2-7x-3)}{(2x-3)}$$

El numerador es una parábola, x puede tomar cualquier valor de los números Reales.

El denominador no puede ser cero, porque no existe la división por cero. Se analiza en donde toma el valor de cero el denominador; para esto se iguala a cero y se resuelve la ecuación.

$2x - 3 = 0$

$2x - 3 + 3 = 0 + 3$

$2x = 3$

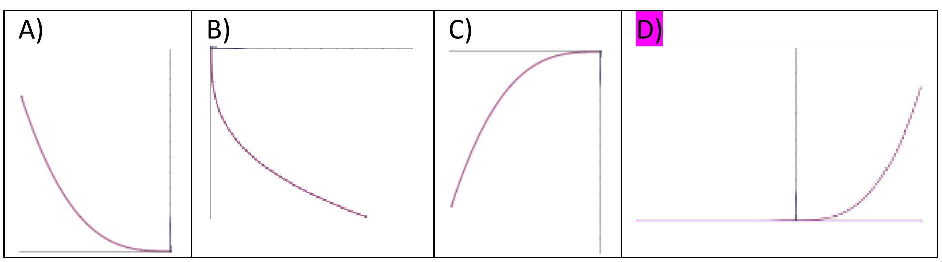
$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$

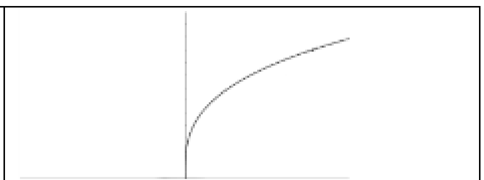
$x = \frac{3}{2}$

El denominador toma el valor de cero cuando "x" vale $\frac{3}{2}$.

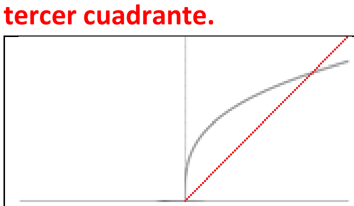
El dominio de la función $\mathrm{f(x)+g(x)} = \frac{(6x^2-7x-3)}{(2x-3)}$, son todos los números sobre el eje "x" no incluye $\frac{3}{2}$.

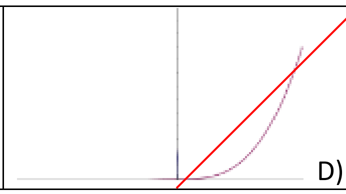
4. La gráfica que representa la función inversa de la función biyectiva que se muestra a la derecha es





Gráficamente, las gráficas de las funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante y del tercer cuadrante.





Se traza la bisectriz de la gráfica que se muestra a la derecha y la opción D) es simétrica y ésta es la gráfica que representa la función inversa.

5. El $\lim_{x\to 12}\frac{3-\sqrt{x-3}}{x-12}$ es

a) 6 b) $\frac{1}{6}$ c) $-\frac{1}{6}$ d) -6

$$\lim_{x\to 12}\frac{3-\sqrt{x-3}}{x-12}=\frac{\lim_{x\to 12}\left(3-\sqrt{x-3}\right)}{\lim_{x\to 12}(x-12)}=\frac{\lim_{x\to 12}3-\lim_{x\to 12}\sqrt{x-3}}{\lim_{x\to 12}x-\lim_{x\to 12}12}=\frac{3-\sqrt{9}}{0}=\frac{3-3}{0}=\frac{0}{0}$$

Al calcular el límite se llega a $\frac{0}{0}$, se dice que es un límite indeterminado, para resolver la indeterminación como se trata de raíces, se requiere racionalizar. Se va a multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $3-\sqrt{x-3}$ que es $3+\sqrt{x-3}$.

$$\frac{3-\sqrt{x-3}}{x-12}=\frac{3-\sqrt{x-3}}{x-12}\cdot\frac{3+\sqrt{x-3}}{3+\sqrt{x-3}}=\frac{3\cdot 3+3\cdot\sqrt{x-3}-\sqrt{x-3}\cdot 3-\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-3}}{x\cdot 3+x\cdot\sqrt{x-3}-12\cdot 3-12\cdot\sqrt{x-3}}=$$

$$=\frac{9+3\sqrt{x-3}-3\cdot\sqrt{x-3}-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{3x+x\sqrt{x-3}-36-12\sqrt{x-3}}=\frac{9-(x-3)}{x\left(3+\sqrt{x-3}\right)-12\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{9-x+3}{(x-12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\frac{-x+9+3}{(x-12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-x+12}{(x-12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-(x-12)}{(x-12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=$$

Una vez racionalizado se llega a $\frac{-1}{\left(3+\sqrt{x-3}\right)}$, se calcular le límite de este último resultado.

$$\lim_{x\to 12}\frac{3-\sqrt{x-3}}{x-12}=\lim_{x\to 12}\frac{-1}{\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{\lim_{x\to 12}-1}{\lim_{x\to 12}\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{\lim_{x\to 12}3+\lim_{x\to 12}\sqrt{x-3}}=$$

$$=\frac{-1}{3+\sqrt{\lim_{x\to 12}(x-3)}}=\frac{-1}{3+\sqrt{\lim_{x\to 12}x-\lim_{x\to 12}3}}=\frac{-1}{3+\sqrt{12-3}}=\frac{-1}{3+\sqrt{9}}=\frac{-1}{3+3}=-\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

$$\lim_{x\to a}[c]=c$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

6. El $\lim_{x\to 12}\frac{\sqrt{16x^2-24x+9}}{2x+7}$ es

a) 45 b) 31 c) $\frac{31}{45}$ d) $\frac{45}{31}$

$$\lim_{x\to 12}\frac{\sqrt{16x^2-24x+9}}{2x+7}=\frac{\lim_{x\to 12}\sqrt{16x^2-24x+9}}{\lim_{x\to 12}(2x+7)}=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 12}16x^2-24x+9}}{\lim_{x\to 12}2x+\lim_{x\to 12}7}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 12}16x^2-\lim_{x\to 12}24x+\lim_{x\to 12}9}}{\lim_{x\to 12}2x+\lim_{x\to 12}7}=\frac{\sqrt{16\lim_{x\to 12}x^2-24\lim_{x\to 12}x+9}}{2\lim_{x\to 12}x+7}=\frac{\sqrt{16\cdot 12^2-24\cdot 12+9}}{2\cdot 12+7}=$$

$$=\frac{\sqrt{16\cdot 12\cdot 12-288+9}}{24+7}=\frac{\sqrt{2304-288+9}}{31}=\frac{\sqrt{2304+9-288}}{31}=\frac{\sqrt{2313-288}}{31}=\frac{\sqrt{2025}}{31}=\frac{45}{31}$$

7. El $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{1-2x}$ es

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{1-2x}=\frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(8x^3-1)}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(1-2x)}=\frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}8x^3-\lim_{x\to\frac{1}{2}}1}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}1-\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x}=\frac{8\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}x^3-1}{1-2\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}x}=\frac{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{1-2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{8\cdot\frac{1^3}{2^3}-1}{1-\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{8\cdot\frac{1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2}-1}{1-1}=\frac{\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{8}-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Al calcular el límite se llega a $\frac{0}{0}$, se dice que es un límite indeterminado, para resolver la indeterminación como el numerador es una diferencia de cubos perfectos, se factoriza el numerador.

$$8x^3-1=2^3x^3-1^3=(2x)^3-1^3=(2x-1)((2x)^2+2x+1)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{1-2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)((2x)^2+2x+1)}{1-2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2^2x^2+2x+1)}{-(2x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}-(4x^2+2x+1)=$$

$$=-\left(\lim_{x\to\frac{1}{2}}4x^2+\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x+\lim_{x\to\frac{1}{2}}1\right)=-\left(4\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}x^2+2\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}x+1\right)=-\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1\right)=$$

$$=-\left(4\cdot\frac{1^2}{2^2}+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+1\right)=-\left(\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}+1+1\right)=-(1+1+1)=-(3)=-3$$

8. El $\lim_{x\to0}\frac{\tan(4x)}{sen(2x)}$ es

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d)2

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(4x)}{sen(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}(4x)}{sen(2x)\cos(4x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(4x)}{\frac{d}{dx}sen(2x)\cos(4x)}\right)=$$

u=4x v=2x

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{d}{dx}\mathrm{sen\,u}\cdot\frac{d}{dx}u}{\cos(4x)\frac{d}{dx}sen(2x)+sen(2x)\frac{d}{dx}\cos(4x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos4x\cdot4}{\cos(4x)\frac{d}{dx}sen(v)\frac{d}{dx}v+sen(2x)\frac{d}{dx}\cos u\frac{d}{dx}u}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4\cos4x}{\cos(4x)\cos(2x)\cdot2+sen(2x)(-sen\,(4x)\cdot4}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{4\cos4x}{2\cos(4x)\cos(2x)-4sen(2x)(sen\,(4x))}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{4\cos4x}{2}}{\frac{2\cos(4x)\cos(2x)}{2}-\frac{4sen(2x)(sen\,(4x))}{2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2\cos4x}{\cos(4x)\cos(2x)-2sen(2x)(sen\,(4x))}\right)=$$

$$=\left(\frac{2\cos4\cdot0}{\cos(4\cdot0)\cos(2\cdot0)-2sen(2\cdot0)(sen\,(4\cdot0))}\right)=\left(\frac{2\cos0}{\cos(0)\cos(0)-2sen(0)(sen\,(0))}\right)=$$

$$=\left(\frac{2\cdot\mathbf{1}}{\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}-2\cdot0\cdot0}\right)=\left(\frac{2}{\mathbf{1}-\cdot0}\right)=\left(\frac{2}{\mathbf{1}}\right)=2$$

9. El $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ es

a) e^2 b) $2e$ c) $\frac{2}{e}$ d) $\frac{1}{e^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\log\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(\frac{x+2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x(\log(x+2)-\log x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log(x+2)-\log x}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-(-\log(x+2)+\log x)}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{\frac{2}{x(x+2)}}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x^2}{x(x+2)}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{(x+2)}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{1}} = \lim_{x\to\infty} e^{2} = e^2$$

10. La función $f(x) = \begin{cases} 2x+a, si\ x<1 \\ x-1, si\ x\geq 1\end{cases}$ es continua el valor de a es

a) 2 b) 0 c) -1 d) -2

$$\lim_{x\to 1}\ 2x+a = 2\cdot 1 + a = 2+a$$

$$\lim_{x\to 1^+}\ x-1 = 1-1 = 0$$

Para que la función f(x) sea continua, los dos limites deber ser iguales, es decir, 2+a debe ser igual a 0.
Se igualan los límites para calcular el valor de “a”.

2+a=0

2+a=0

2+a-2=0-2

a=-2

11. La derivada con respecto a x de $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x+3}}$ es

a) $-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ c) $-\frac{1}{x+3}$ d) $\frac{1}{x+3}$

$$\frac{x+3}{\sqrt{x+3}} = \frac{(x+3)^1}{(x+3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x+3)^{\frac{2}{2}}}{(x+3)^{\frac{1}{2}}} = (x+3)^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$$

u=x+3

$$\frac{d}{dx}\frac{x+3}{\sqrt{x+3}} = \frac{d}{dx}(x+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}u = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

12. La derivada con respecto a *x* de $f(x)=e^{sen^2(x)}$ es

a) $sen(2x)e^{sen^2(x)}$ b) $2sen(x)e^{sen^2(x)}$ c) $2cos(x)e^{sen^2(x)}$ d) $cos(2x)e^{sen^2(x)}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{sen^2(x)}\right) = \frac{d}{du}(e^u)\frac{d}{dx}\left(sen^2(x)\right) = e^u\cdot 2sen\ x cos\ x = e^u\cdot sen\ (2x) = sen\ (2x)e^{sen^2(x)}$$

$$u = sen^2(x)$$

13. La derivada de ***y*** con respecto a ***x*** de $x^2 + xy + y^2 = 2$ es

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y-2}{x+2y}$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x+2y}$ c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y}{x}$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}2$$

$$2x^{2-1} + y\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}y + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

$$2x^1 + y\cdot 1 + x\frac{d}{dx}y + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

$$2x - 2x + y - y + x\frac{d}{dx}y + 2y\frac{d}{dx}y = 0 - 2x - y$$

$$x\frac{d}{dx}y + 2y\frac{d}{dx}y = -2x - y$$

$$(x+2y)\frac{d}{dx}y = -2x - y$$

$$\frac{(x+2y)\frac{d}{dx}y}{(x+2y)} = \frac{-2x-y}{(x+2y)}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-2x-y}{(x+2y)}$$

$$\frac{d}{dx}y = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

14. La segunda derivada con respecto a x de $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ es

a) $\frac{24}{x^5}$ b) $-\frac{24}{x^5}$ c) $\frac{24}{x^3}$ d) $-\frac{24}{x^3}$

$$\frac{d}{dx} - \frac{2}{x^3} = \frac{d}{dx} - 2x^{-3} = -2\frac{d}{dx}x^{-3} = -2(-3x^{-3-1)}) = -2(-3x^{-4)}) = \frac{2\cdot 3}{x^4} = \frac{6}{x^4}$$

$$\frac{d^2}{dx} - \frac{2}{x^3} = \frac{d}{dx}\frac{6}{x^4} = \frac{d}{dx}6x^{-4} = 6\frac{d}{dx}x^{-4} = 6(-4x^{-4-1)}) = 6(-4x^{-5)}) = -\frac{6\cdot 4}{x^5} = -\frac{24}{5}$$

15. La derivada con respecto a x de la función $y = \cos\left(\frac{1-x}{x}\right)$ es

a) $\frac{1}{x^2} sen\left(\frac{1-x}{x}\right)$ b) $sen\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$ c) $-\frac{1}{x^2} sen\left(\frac{1-x}{x}\right)$ d) $-sen\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$	$y = \cos\left(\frac{1-x}{x}\right) = \cos u$ $u = \frac{1-x}{1}$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{d}{du}\cos u \cdot \frac{d}{dx}u = -sen\,u \cdot \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x} = -sen\,u\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x} - \frac{d}{dx}\frac{x}{x}\right) = -sen\,u\left(\frac{d}{dx}x^{-1} - \frac{d}{dx}1\right) =$$

$$= -sen\,u(-1x^{-1-1} - 0) = -sen\,u(-x^{-2}) = sen\,u(x^{-2}) = \frac{sen\,u}{x^2} = \frac{sen\,\frac{1-x}{x}}{x^2}$$

16. La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $y = \frac{2}{3+2x}$ en el punto $P(-1,2)$ es

a) 8x + y + 2 = 0 b) x + 4y – 7 = 0 c) x – 4y + 9 = 0 d) x – 4y – 6 = 0

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3+2x}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3+2x}\right) = 2\frac{d}{dx}\frac{1}{u} = 2\left(\frac{-1}{u^2}\cdot\right)\frac{du}{dx} = 2\left(\frac{-1}{u^2}\cdot\right)\frac{d(3+2x)}{dx} = 2\left(\frac{-1}{u^2}\cdot\right)\left(\frac{d(3)}{dx} + \frac{d(2x)}{dx}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{-1}{u^2}\right)(0+2) = 2\left(\frac{-1}{u^2}\right)(2) = 2\cdot 2\left(\frac{-1}{u^2}\right) = 4\left(\frac{-1}{u^2}\right) = \frac{-4}{u^2} = \frac{-4}{(3+2x)^2}$$ u=3+2x

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = c\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

Para encontrar la pendiente a la recta tangente, se sustituye el valor de x= -1 en la primera derivada:

$$f'(-1) = \frac{-4}{(3+2\cdot(-1))^2} = \frac{-4}{(3-2)^2} = \frac{-4}{(1)^2} = \frac{-4}{1} = -4 \quad (m_t)$$

La multiplicación de la pendiente de la recta tangente m_t y la pendiente de la recta normal (m_n), debe ser -1 (condición de perpendicularidad. Se aplica este concepto para encontrar la pendiente de la recta normal.

Condiciones especiales

Perpendicularidad

$m_1 m_2 = -1$

$$m_t \cdot m_n = -1$$
$$-4 \cdot m_n = -1$$
$$\frac{-4 \cdot m_n}{-4} = \frac{-1}{-4}$$
$m_n = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ Pendiente de la recta normal.

Para encontrar la ecuación de la recta normal se aplica la fórmula de la recta punto-pendiente. El punto es $P(-1,2)$

Recta
Formas de la ecuación
Punto - pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - (-1))$$
$$4(y-2) = 1(x+1)$$
$$4y - 4\cdot 2 = x + 1$$
$$4y - 8 = x + 1$$
$$4y - 8 - x - 1 = x - x + 1 - 1$$
$$4y - 8 - x - 1 = 0$$
$$-x + 4y - 8 - 1 = 0$$
$$-x + 4y - 9 = 0$$
$$(-1)(-x + 4y - 9) = (0)(-1)$$
$x - 4y + 9 = 0$ Ecuación de la recta normal.

17. La función de posición de un proyectil que es lanzado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo es $s(t) = -16t^2 + 48t$, donde ***s*** se mide en metros y ***t*** en segundos. Entonces la altura máxima que alcanzará el proyectil es

a) 1.5m b) 3.0m c) 27.5m d) 36.0m

Se calcula la derivada de la función s(t)

$$\frac{d}{dt}(-16t^2 + 48t) = 48 - 32t$$

Para encontrar el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima, se iguala la primera derivada acero y se despeja t.

$48 - 32t = 0$

$48 - 32t - 48 = 0 - 48$

$-32t = -48$

$$\frac{-32t}{-32} = \frac{-48}{-32}$$

$t = \frac{48}{32} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{3}{2} = 1.5$ En un tiempo de t=1.5 segundos alcanza la altura máxima.

Para encontrar la altura máxima t=1.5 se sustituye en la ecuación original.

$s(1.5) = -16\cdot1.5^2 + 48\cdot1.5 = -16\cdot2.25 + 72 = -36 + 72 = 36\text{ m}$ Altura máxima que alcanza el proyectil.

18. La función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ tiene un mínimo relativo en

a) $x = -\frac{5}{3}$ b) x=-1 c) x=1 d) $x = \frac{5}{3}$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 5x + 1) = 3x^2 - 8x + 5$$

Se iguala a cero la primera derivada para determinar los puntos críticos.

$3x^2 - 8x + 5 = 0$ Ecuación de segundo grado, se resuelve por formula general o por factorización.

$(3x - 5)(x - 1) = 0$

$3x - 5 = 0$	$x - 1 = 0$
$3x - 5 + 5 = 0 + 5$	$x - 1 + 1 = 0 + 1$
$3x = 5$	$x = 1$
$\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$	
$x = \frac{5}{3}$	

Se sustituye los valores de "x" en la función original para encontrar los puntos críticos.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ $f(1) = 1^3 - 4\cdot1^2 + 5\cdot1 + 1$ $f(1) = 3$	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ $f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5\frac{5}{3} + 1$ $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{77}{27} = 2.\overline{851}$

Se tienen dos puntos críticos $P_1(1, 3)$ y $P_2\left(\frac{5}{3}, \frac{77}{27}\right)$

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de "x" de los puntos críticos para determinar si hay máximo o mínimo.

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 - 4x^2 + 5x + 1) = 6x - 8$$

$f''(x) = 6x - 8$ $f''(1) = 6\cdot1 - 8$ $f''(1) = 6 - 8$ $f''(1) = -2$ El resultado de la operación es negativo hay un máximo	$f''(x) = 6x - 8$ $f''\left(\frac{5}{3}\right) = 6\cdot\frac{5}{3} - 8$ $f''\left(\frac{5}{3}\right) = 30 - 8$ $f''\left(\frac{5}{3}\right) = 22$ El resultado de la operación es positivo hay un mínimo

19. La función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ tiene un punto de inflexión en

a) $x = -1$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1\right) = x^2 - x - 2$	Primera derivada.
$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1\right) = 2x - 1$	Segunda derivada.
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1\right) = 2$	La tercera derivada es diferente de 0, significa que hay puntos de inflexión.

Se iguala a cero la segunda derivada, para encontrar las raíces de los posibles puntos de inflexión.

$2x - 1 = 0$

$2x - 1 + 1 = 0 + 1$

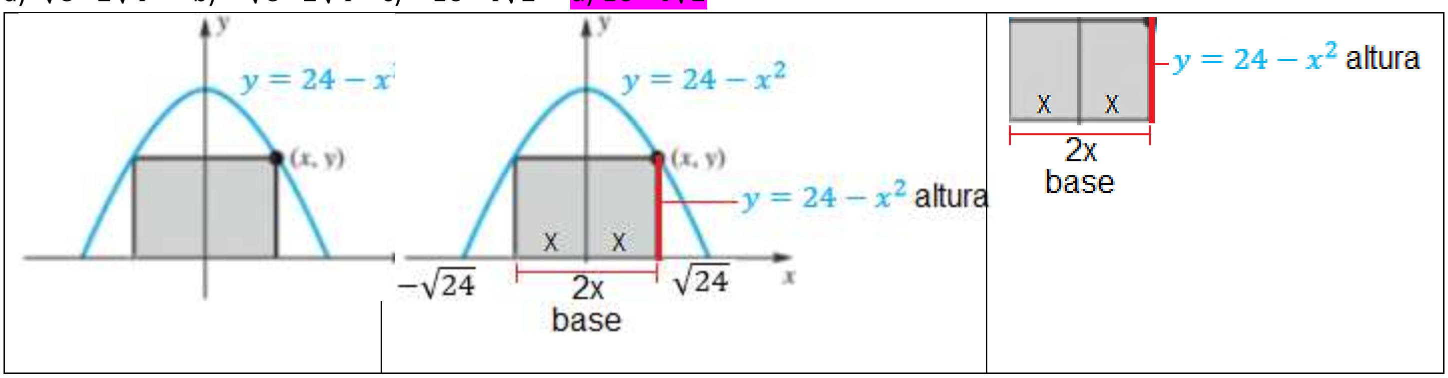
$2x = 1$

$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ raíz del punto de inflexión.

20. Un rectángulo se inscribe en la parábola de ecuación $y = 24 - x^2$ como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con el área máxima?

a) $\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{4}$ b) $-\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{4}$ c) $-16 \cdot 4\sqrt{2}$ d) $16 \cdot 4\sqrt{2}$



$y = 24 - x^2$

Se determina en que puntos del eje x pasa la parábola, significa que en esos dos puntos "y" debe tener el valor de 0; dos puntos porque se trata de una ecuación de segundo grado y por lo tanto tiene dos soluciones.

$y = 24 - x^2$

$24 - x^2 = y$

$24 - x^2 = 0$

$24 - x^2 - 24 = 0 - 24$

$-x^2 = -24$

$(-1)(-x^2) = (-1)(-24)$

$x^2 = 24$

$x = \pm\sqrt{24}$ $x_1 = \sqrt{24}$ $x_2 = -\sqrt{24}$ Abscisas donde la gráfica corta el eje "x".

Área del rectángulo: $A = base \cdot altura = 2x(24 - x^2) = 2x \cdot 24 - 2x \cdot x^2 = 48x - 2x^3$, se puede escribir como:

A(x)= $48x - 2x^3$ Al derivar esta área se obtiene:

A´(x)= $48 - 6x^2$

Se iguala a cero la primera derivada para calcular los puntos críticos:

$48-6x^2$=0

$48-6x^2-48$=0-48

$-6x^2$=-48

$\frac{-6x^2}{-6}$=$\frac{-48}{-6}$

x^2=8

$x=\pm\sqrt{8}$ $x_1=\sqrt{8}$ $x_2=-\sqrt{8}$ Abscisas de los puntos críticos.

Criterio de la segunda derivada

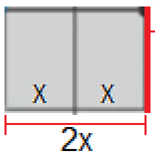
A´(x)= $48-6x^2$

A´´(x)=$-12x^2$

Se sustituye el punto crítico $x_1=\sqrt{8}$ en la segunda derivada, para determinar máximos y mínimos.

A´´($\sqrt{8}$)=$-12\left(\sqrt{12}\right)^2=12\cdot 12=144$ El valor es positivo hay un máximo.

Dimensiones del rectángulo: base $4\sqrt{2}$ altura 16



$y=24-x^2$ altura

$y=24-x^2=24-\left(\sqrt{8}\right)^2=24-8=\boxed{16}$

base 2x=$2\sqrt{8}$=$2\sqrt{2\cdot 2\cdot 2}=2\sqrt{2\cdot 2}\sqrt{2}=2\cdot 2\sqrt{2}=\boxed{4\sqrt{2}}$

21. La función que al derivar resulta $f'(x)=x^3-3x^2+4$ y que pasa por el punto (2,0) es

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x-4$ b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x+4$ c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-4x$ d) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x$

$$\int(x^3-3x^2+4)\,dx=\int x^3\,dx-3\int x^2\,dx+4\int 1\,dx=\frac{x^4}{4}-\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}+4x+C=\frac{x^4}{4}-x^3+4x+C$$

La función $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+4x+c$ debe pasar por el punto (2,0) y al derivarla obtendremos $f'(x)=x^3-3x^2+4$

Al evaluar la función $f(x)$ en el punto x=0, el valor de "y" tiene que ser 0.

$f(x=2)=\frac{2^4}{4}-2^3+4\cdot 2$+c

$f(x=2)=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2}-2\cdot 2\cdot 2+8+c$

$f(x=2)=2\cdot 2-8+8$+c

$f(x=2)=4-8+8$+c

$f(x=2)=4+8-8$+c

$f(x=2)=12-8$+c

$f(x=2)=4$+c

$f(x=2)=0$

$f(x=2)=4$+c=0

4+c=0

4+c-4=0-4

c=-4

La función $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3-4x+c$ buscada es $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+4x-4$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}-x^3+4x-4\right)=\frac{4x^3}{4}-3x^2+4=x^3-3x^2+4$

22. Al calcular $\int \frac{tan^2(x)}{cos^2(x)}dx$ se obtiene

a) $-\frac{tan^3(x)}{3}+C$ b) $\frac{cot^3(x)}{3}+C$ c) $-\frac{cot^3(x)}{3}+C$ d) $\frac{tan^3(x)}{3}+C$

Se aplica la integral por sustitución: u=tan x $\frac{d}{dx}u = sec^2x$ $du = sec^2xdx$

$$\int \frac{tan^2x}{cos^2x}dx = \int tan^2x\frac{1}{cos^2x}dx = \int tan^2x sec^2\, xdx = \int u^2\, du = \frac{u^{2+1}}{2+1}+c = \frac{u^3}{3}+c = \frac{\tan^3 x}{3}+c$$

23. Al calcular $\int 2xe^x dx$ se obtiene

a) $e^x(1-x)+C$ b) $2e^x(1-x)+C$ c) $2e^x(x-1)+C$ d) $e^x(x-1)+C$

$$\int 2xe^x dx = 2\int xe^x dx = 2\int xe^x dx = 2\left(e^x x - \int e^x dx\right) = 2(e^x x - e^x)+c = 2e^x(x-1)+c$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Se realiza la integración por partes: u=x v´=e^x

24. El área bajo la curva $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el intervalo [0,3] es

a) 3u^2 b) 4u^2 c) $\frac{14}{3}u^2$ d) 4u^2

La integral se resuelve por sustitución, u=x+1

$$\int \sqrt{x+1}dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{u^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}+c = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{\frac{u^{\frac{3}{2}}}{1}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{1}\div\frac{3}{2}+c = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+c = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$$

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}dx = \frac{2(3+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2(0+1)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{2\sqrt{4\cdot 4\cdot 4}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{64}}{3} - \frac{2}{3} =$$
$$= \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$